تقدیم به
تو و بغل‌دستی‌های خوبت!

سلام

خوبین؟ خوش می‌گذره؟ سال دوازدهم چه‌طوره؟ با امتحان نهایی و کنکور چه کار می‌کنین؟ امسال براتون سال سرنوشته؟ ... .

فکر می‌کنم خیلی از بچه‌های رشتهٔ تجربی که دارن توی سال دوازدهم درس می‌خونن دوست دارن برن یکی از رشته‌های گروه پزشکی، دندان‌پزشکی، داروسازی، تغذیه و ... و به همین علت هم یه سؤال اساسی دارن: «اصلاً، چرا باید این‌قدر ریاضی بخونیم؟ چه فایده‌ای داره؟ ریاضی که برامون نون نداره؟!» بذارین اولش به شوخی جواب بدم: «اشکالی نداره، اگر برای شما نون نداره برای ما که آب داره!!»

ولی از شوخی که بگذریم یکی از خوبی‌های ریاضی اینه که آدم وقتی که یادش می‌گیره، حس می‌کنه ذهن و فکرش داره حسابی کار می‌کنه، من که این‌طور بودم، شما رو نمی‌دونم! توی کنکور تجربی هم یکی از درس‌هایی که خیلی روی رتبهٔ بچه‌ها تأثیر داره همین ریاضیه، مخصوصاً وقتی یه نفر درصد ریاضیش زیاد و با اختلاف خوبی از بقیه بالاتر باشه یهو نمرهٔ ترازش خیلی خفن می‌ره بالا. به همین دلیل، پاسخ اصلی، واقعی و کاربردی در جواب این سؤال که درس ریاضی به چه درد تجربی‌ها می‌خوره همینه! این‌که باعث می‌شه تا وضعیتون نسبت به بقیه خیلی بهتر بشه.

اما اگر یه کمی هم از واقعیتی که امروز باهاش سروکار دارین، فاصله بگیریم می‌شه گفت: زندگی که همه‌اش خوردن، خوابیدن و کارکردن نیست، فکرکردن، مسئله حل‌کردن، تصمیم‌گیری و ... از این جور چیزا هم مهمه. ریاضی درسی‌ایه که آدم باهاش این چیزا رو تمرین می‌کنه. تا حالا شده یه جوری غرق حل یه مسئلهٔ ریاضی بشین که گذشت زمان رو نفهمین؟ اگر شدین که خوش به حالتون، اگه هم نشدین آرزو می‌کنم حداقل یه بار این حسو تجربه کنین که بفهمین منظورم چیه.

ما ایرانیا قبلاً (یعنی حدود چند قرن پیش) کارمون توی ریاضی خیلی درست‌تر از الان بود. اما بعدش کم‌کم افت کردیم و دیگه چندان جایگاهی توی تولید و گسترش علم ریاضی نداشتیم. البته هر چند سال یه بار یهو یه اتفاقی می‌افته که می‌فهمیم اگه بخوایم و اگه تلاش کنیم هنوز هم ممکنه یه کارایی بکنیم. مثلاً همین زنده‌یاد مریم میرزاخانی که دو سال پیش جایزهٔ فیلدز رو برد نمونهٔ خوبیه که ریاضی نه فقط مختص خارجی‌هاست و نه فقط مختص مردها!

دور شدیم، مریم میرزاخانی رشته‌اش ریاضی بود و همین‌طور عشقش، اما شما که رشته‌تون تجربیه و عشقتون رو هم نمی‌دونم چیه؟

شما برای چی دوست دارین ریاضی یاد بگیرین؟ چرا دلتون می‌خواد بتونین به همهٔ سؤالای ریاضی هر امتحانی درست و کامل جواب بدین؟ چرا این‌قدر دنبال خوندن ریاضی هستین؟ (به نظرم دارم تلقین می‌کنم!!) حالا به هر دلیلی که باشه این کتاب بهتون کمک می‌کنه که این کار رو هر چه بهتر انجام بدین. امتحان کنین!

خوش باشین

مقدمه مؤلف

سلام

حتماً خودتان از اهمیت درس ریاضی در نمرهٔ کنکور و معدل امتحان نهایی باخبرید! پس وقتتان را با این حرف‌های تکراری نمی‌گیرم، یک‌راست میرم سر اصل مطلب، یعنی ویژگی‌های کتابی که در دست دارید:

۱ این کتاب با توجه کامل و دقیق به کتاب درسی ریاضی ۳ نوشته شده و شامل تمام نکات، مفاهیم، نمونه تمرین و مثال‌های کتاب درسی است. *(اگر تونستید یک مورد خلاف این پیدا کنید، جایزه دارید.)*

۲ در همهٔ فصل‌ها سعی شده است تعداد تمرین‌ها، حجم توضیح‌ها و حجم کلی فصل مناسب‌ترین مقدار ممکن باشد. می‌دانیم شما در سال دوازدهم خیلی وقت ندارید که کار اضافی بکنید. *(اما باور کنید که در هر کاری بلاخره یک حداقل میزان قابل قبول تلاش لازم است.)*

۳ در انتهای هر فصل یک آزمون جمع‌بندی داریم که علاوه بر جمع‌بندی مطالب، سؤالات جدی‌تر و ترکیبی دارد توصیه می‌کنم به این آزمون‌ها به طور جدی توجه کنید.

۴ در تمرین‌های هر درس و آزمون‌های جمع‌بندی نگاهمان به امتحان نهایی بوده است اما در عین حال فرض را بر آن گرفته‌ایم که ممکن است امتحان نهایی دشوارتر و مفهومی‌تر شود. پس هدفمان این است که برای امتحان با هر درجه سختی آماده شوید.

۵ سؤالات با علامت سخت‌ترین سؤال‌های هر درس هستند. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شوید، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگر به سراغ آن‌ها بروید.

۶ پیشنهاد می‌کنم به جای این‌که تعدادی زیاد از سؤال‌ها را زیاد حل کنید سؤال‌های این کتاب را زیاد حل کنید. مهم یادگرفتن است؛ یادگرفتن روش حل، روش فکرکردن و روش استدلال. *(بازهم تعریف نیست، فقط یک پیشنهاد است.)*

۷ توضیحات و درس‌نامه‌ها و سؤال امتحانی هر درس، تکمیل‌کنندهٔ یکدیگرند. از هر کدام که غفلت کنید قسمتی از درس را از دست می‌دهید.

۸ پیشنهاد می‌کنم حتماً در بار اول استفاده از کتاب، نکته‌های مهم، سؤال‌هایی به نظرتان سخت است، سؤال‌هایی را که نتوانستید حل کنید و ... را مشخص کنید تا در زمان مرور و جمع‌بندی مطالب از مواردی که مشخص کرده‌اید استفاده کنید.

۹ امسال امتحان تشریحی دارید، پس نحوهٔ نوشتن پاسخ کتبی برایتان بسیار مهم است *(یا باید باشد)* پاسخنامهٔ این کتاب با توجه به این موضوع به شیوه‌ای نوشته شده که راهنمای پاسخ به امتحانات کتبی باشد. یادتان باشد از روش‌های میانبر و تستی نمی‌توانید استفاده کنید. در ضمن توجه کنید کجاها قرار است فرمول‌ها و روابط را بنویسید.

۱۰ در انتهای کتاب دو نمونه آزمون نیم‌سال اول و چهار نمونه نیم‌سال دوم آورده شده تا با امتحانات واقعی هم آشنا شوید.

۱۱ **تیترها، کادرها و آیکون‌های مورد استفاده در درس‌نامه**

تیتر اصلی این تیتر موضوع اصلی یک قسمت از درس‌نامه را مشخص می‌کند. مثلاً: **تابع وارون**

تیتر فرعی این تیتر موضوع بخشی از یک تیتر اصلی را بیان می‌کند. مثلاً: **پیداکردن ضابطهٔ وارون**

تیتر جزئی: این تیتر موضوع یک مبحث از تیتر فرعی را بیان می‌کند. مثلاً: **دامنهٔ تابع وارون**

کادرهای فرمول و تعریف: همهٔ فرمول‌ها و تعریف‌ها و قضیه‌هایی را که شما باید حفظ باشید، داخل کادر قرار داده‌ایم.

> **دورهٔ تناوب تانژانت:** دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan x$ برابر است با: $T=\frac{\pi}{|a|}$

آیکون‌ها: در درس‌نامه به آیکون‌هایی مثل **نکته**، **توجه**، **تذکر** و ... برخورد می‌کنید. همان‌طور که از اسمشان مشخص است باید دقتتان هنگام خواندن این‌جا چند برابر شود.

با همهٔ دقت و نیرویی که برای نوشتن این کتاب گذاشته‌ام و تلاش کرده‌ام که کتاب خوبی شود، مطمئنم که شما می‌توانید پیشنهادهای خیلی خوبی برای بهترشدن کتاب بدهید. منتظر شنیدن نظراتتان هستم.

در مورد درس‌نامه‌ها، سؤال‌ها و پاسخ‌ها، هر چه را که فکر می‌کنید کم یا زیاد است یا اگر تغییر کند بهتر می‌شود برایم بنویسید. اگر توانستید نظر معلم‌هایتان را هم در مورد کتاب بپرسید و برایم بنویسید. بهتر از دیروز، موفق‌تر از گذشته و سرحال‌تر از همیشه باشید.

از تمامی عزیزانی که در بهبود کتاب به ما کمک کرده‌اند به ویژه سرکار خانم جالینوسی بسیار سپاس‌گزارم.

فهرست

فصل ۱: تابع

درس ۱: توابع چندجمله‌ای

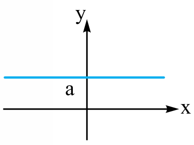
در دو سال گذشته با تابع آشنا شدیم. دیدیم تابع را می‌توانیم به شکل مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار پیکانی، نمودار مختصاتی یا یک ضابطهٔ جبری نمایش دهیم. **دیدیم دامنهٔ تابع یعنی مجموعهٔ مقادیری از x که تابع به ازای آن‌ها تعریف می‌شود و برد تابع یعنی مجموعهٔ مقادیر تابع یا y.** یکی از انواع توابعی که در سال‌های دهم و یازدهم شناختیم **توابع چندجمله‌ای** بود.

می‌دانیم **هر تابع با ضابطهٔ** $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ **که در آن** $a_n,\ldots,a_۲,a_۱,a_۰$ **اعداد حقیقی و توان‌های x یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یک تابع چندجمله‌ای است.** *(ساده‌ترش این‌که توان‌های x باید اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند)* مثلاً $f(x)=۵$ و $g(x)=۳x$ و $h(x)=-۲x+۳$ و $k(x)=x^۲+۲x-۱۰$ همه یک تابع چندجمله‌ای‌اند ولی مثلاً $t(x)=\frac{۲}{x}$ ، $p(x)=\sqrt{x}+۲$ و $q(x)=\sin x+۳$ توابع چندجمله‌ای نیستند. **به بزرگ‌ترین توان x در تابع می‌گوییم درجهٔ چندجمله‌ای.** در مثال‌های بالا f از درجهٔ صفر، g و h از درجهٔ ۱ و k از درجهٔ ۲ است.

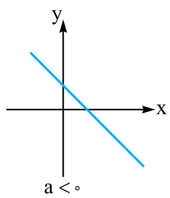
دامنهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است و اگر n فرد باشد، برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است. چند مثال از توابع چندجمله‌ای:

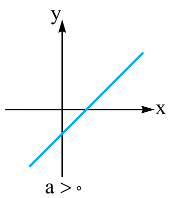
۱ **تابع $f(x)=a$ (یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر) یک تابع ثابت است.**

حتماً یادمان هست که برد برابر است با $R_f=\{a\}$.



۲ **تابع $f(x)=ax+b$ (از درجهٔ ۱) یک تابع خطی است که برد برابر است با** $R_f=\mathbb{R}$.

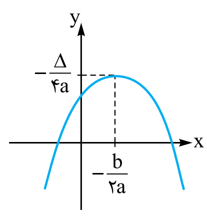




۳ **تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ (از درجهٔ ۲) یک سهمی است که برد برابر است با:**

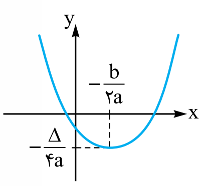
$R_f=(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$

برد $=(-\infty$, ماکزیمم$]$



$R_f=[\frac{-\Delta}{۴a},+\infty)$

برد $=[$مینیمم $,+\infty)$



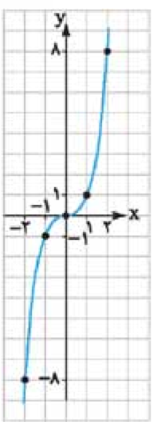
این‌ها تابع‌هایی بودند که در سال دهم و یازدهم با آن‌ها آشنا شدیم. امسال با تابع $f(x)=x^۳$ آشنا می‌شویم.

تابع $f(x)=x^۳$

نمودار تابع $f(x)=x^۳$ را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸

نمودار تابع به صورت روبه‌رو است:



همان‌طور که در شکل می‌بینیم دامنه و برد تابع برابر است با $\mathbb{R}$.

حالا می‌خواهیم نمودار تابع‌های به شکل $y=m(kx+a)^۳+b$ را با استفاده از نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنیم. قسمتی از روش رسم در درس تبدیل توابع (درس۴) توضیح داده شده است اما بهتر است همین‌جا همه‌چیز را در مورد رسم نمودار تابع‌های درجه‌سوم به شکل بالا یاد بگیریم. پس بهتر است نگاهی به درس انتقال توابع و به ویژه جدول خلاصهٔ این روش‌ها بیندازید. (صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴ همین کتاب)

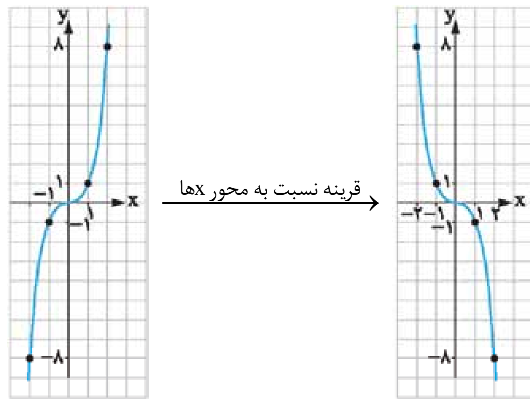
مثال: **نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^۳$ رسم کنید.**

الف) $g(x)=-x^۳$ ب) $g(x)=x^۳-۱$ پ) $g(x)=(x-۱)^۳$

ت) $g(x)=(x+۲)^۳$ ث) $g(x)=-(x+۱)^۳+۲$ ج) $g(x)=(-x+۲)^۳$

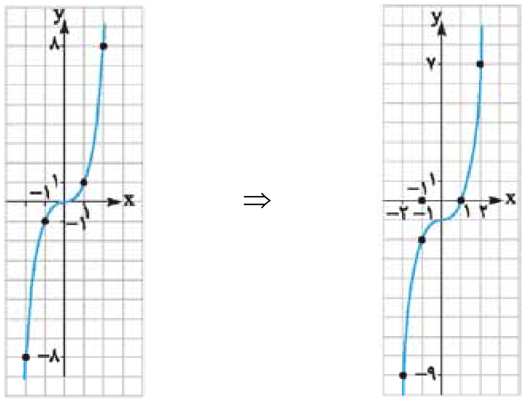
پاسخ: اول نمودار تابع $f(x)=x^۳$ را می‌کشیم و بعد هر کدام از نمودارها را با انتقال مناسب از روی نمودار $f(x)=x^۳$ رسم می‌کنیم.

الف تابع $g(x)=-x^{۳}$ برابر است با $y=-f(x)$ و می‌دانیم برای رسم نمودارش باید نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم:



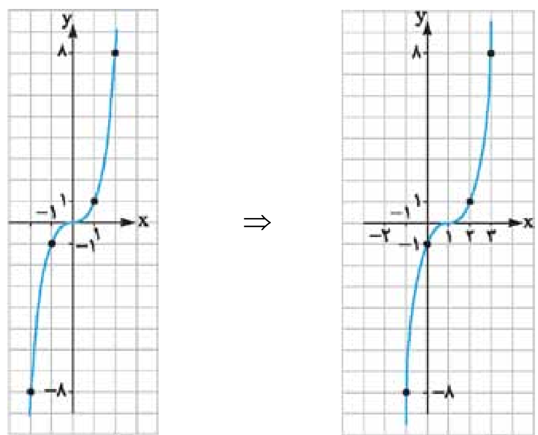
$f(x)=x^{۳}$ $\qquad$ $g(x)=-x^{۳}$

ب تابع $g(x)=x^{۳}-۱$ برابر است با $y=f(x)-۱$ و می‌دانیم برای رسم نمودار $f(x)-۱$، باید نمودار تابع f را یک واحد در راستای محور yها به پایین انتقال دهیم:



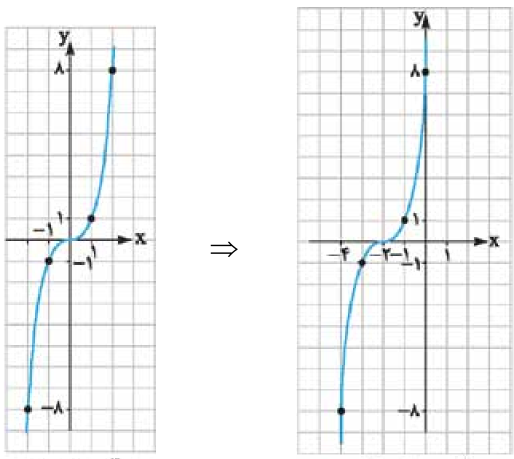
$f(x)=x^{۳}$ $\qquad$ $g(x)=x^{۳}-۱$

پ تابع $g(x)=(x-۱)^{۳}$ برابر است با $y=f(x-۱)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x-۱)$ باید نمودار f را ۱ واحد در راستای محور xها به سمت راست انتقال دهیم:



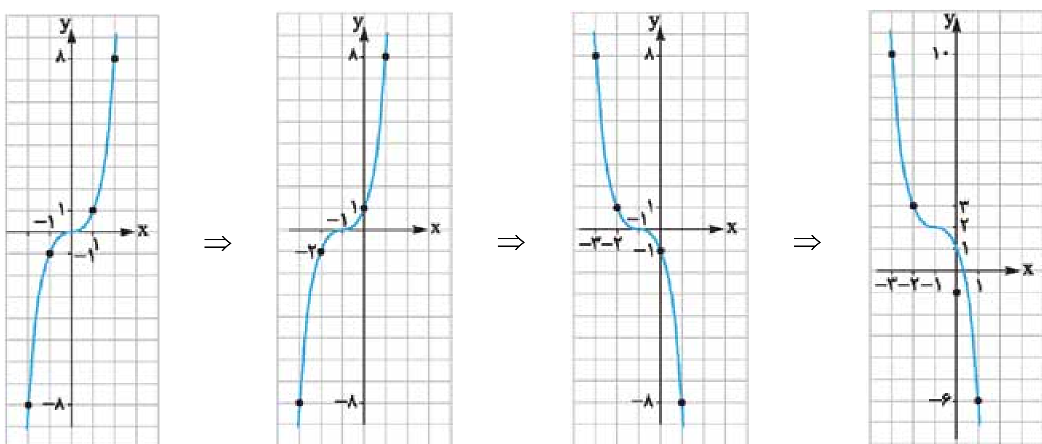
$f(x)=x^{۳}$ $\qquad$ $g(x)=(x-۱)^{۳}$

ت تابع $g(x)=(x+۲)^{۳}$ برابر است با $y=f(x+۲)$ و می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $f(x+۲)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور xها ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم:



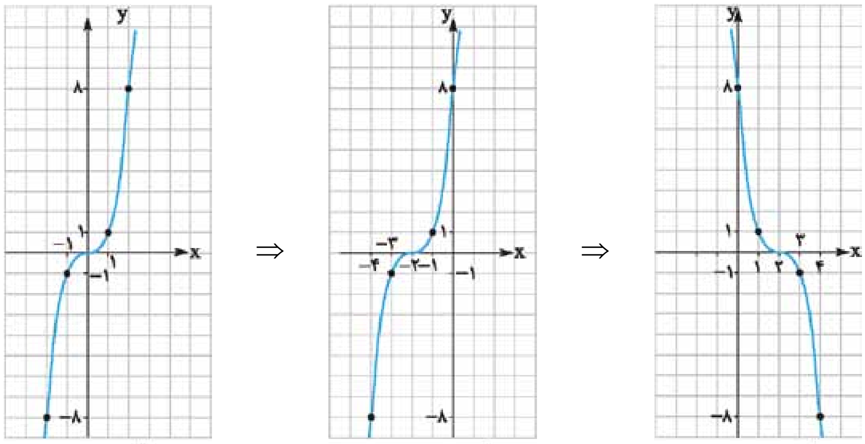
$f(x)=x^{۳}$ $\qquad$ $g(x)=(x+۲)^{۳}$

ث تابع $g(x)=-(x+۱)^{۳}+۲$ برابر است با $y=-f(x+۱)+۲$. پس باید نمودار $f(x)$ را اول ۱ واحد در راستای محور xها به سمت چپ انتقال دهیم (یعنی $f(x+۱)$) و بعد آن را نسبت به محور xها قرینه کنیم (یعنی $-(x+۱)^{۳}$) و بعد در راستای محور yها، ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم (یعنی $-(x+۱)^{۳}+۲$):



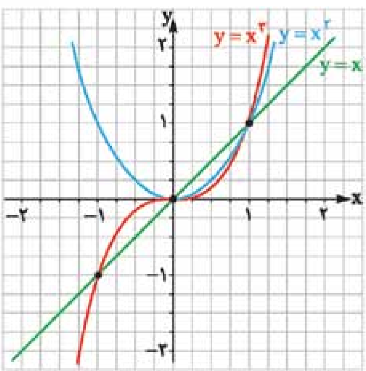
$f(x)=x^{۳}$ $\qquad$ $y=(x+۱)^{۳}$ $\qquad$ $y=-(x+۱)^{۳}$ $\qquad$ $g(x)=-(x+۱)^{۳}+۲$

ج تابع $g(x)=(-x+۲)^۳$ برابر است با $y=f(-x+۲)$. پس باید اول نمودار تابع $f(x+۲)$ را از روی نمودار $f(x)$ رسم کنیم، یعنی نمودار f را در راستای محور xها ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم و بعد نمودار $f(-x+۲)$ را رسم کنیم، یعنی قرینهٔ نمودار $f(x+۲)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم:



$f(x)=x^۳$ ⇐ $g(x)=(x+۲)^۳$ ⇐ $g(x)=(-x+۲)^۳$

بررسی نمودار تابع‌های $y=x$ و $y=x^۲$ و $y=x^۳$



۱ می‌دانیم برای $x>۱$ هر چه مقدار n بیشتر شود، حاصل x^n بزرگ‌تر می‌شود، پس برای xهای بزرگ‌تر از ۱ داریم: $x^۳>x^۲>x$.

۲ در $x=۱$ مقدار x، $x^۲$ و $x^۳$ مساوی ۱ است، پس هر سه نمودار از نقطهٔ $(۱,۱)$ می‌گذرند.

۳ برای $۰<x<۱$ هر چه مقدار n بیشتر شود حاصل x^n کوچک‌تر می‌شود، پس برای xهای بین صفر و ۱ داریم: $x^۳<x^۲<x$.

۴ در $x=۰$ مقدار x، $x^۲$ و $x^۳$ مساوی صفر است، پس هر سه نمودار از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرند.

۵ در $x=-۱$، مقدار x و $x^۳$ مساوی -۱ است ولی مقدار $x^۲$ مساوی ۱ است.

حالا اگر با توجه به نکات بالا نمودار هر سه تابع را رسم کنیم؛ می‌توانیم این ویژگی‌ها را روی نمودار هم ببینیم.

پس در مورد $x^۲$ و $x^۳$ به طور خلاصه می‌توانیم بنویسیم:

$x<۰$	$x=۰$	$۰<x<۱$	$x=۱$	$x>۱$
$x^۳<x^۲$	$x^۳=x^۲$	$x^۳<x^۲$	$x^۳=x^۲$	$x^۳>x^۲$

مثال: **در جاهای خالی زیر عبارت مناسب قرار دهید.**

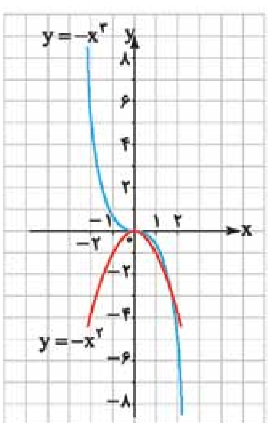
الف) در بازهٔ $(۰,۱)$ نمودار تابع $y=x^۳$، .... نمودار تابع $y=x^۲$ قرار دارد. (نهایی دی ۹۹)

ب) نمودار دو تابع $y=x^۳$ و $y=x^۲$ .... نقطهٔ مشترک دارند.

پ) در بازهٔ $(۱,+\infty)$ نمودار تابع $y=-x^۳$، .... نمودار تابع $y=-x^۲$ قرار دارد.

پاسخ: الف پایین؛ ب دو؛ پ پایین

نمودارهای دو تابع را ببینید:



سؤال‌های با علامت سخت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگه به کم‌تر از ۲۰ راضی نمیشی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برو سراغ اون‌ها.

سؤال‌های امتحانی

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱- دامنه و برد توابع چندجمله‌ای درجهٔ فرد، با هم مساوی‌اند.

۲- دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

۳- تابع $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ یک تابع درجه‌دوم است. *(نهایی خرداد ۱۴۰۱)*

۴- تابع $y=2x(1-3x^2)+1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است. *(نهایی دی ۱۴۰۱)*

۵- نمودار تابع $y=x^2$ در بازهٔ $(0,1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^3$ است. *(نهایی دی ۱۴۰۱)*

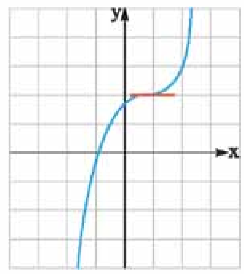
۶- تابع $y=\sqrt{3}x^3-\pi x+1$، یک تابع چندجمله‌ای است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

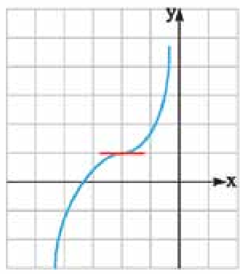
نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

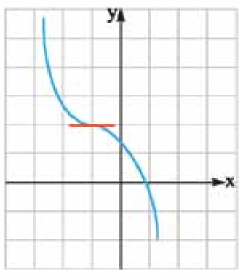
۷- $y=(x+1)^3-1$ ۸- $y=(2x-1)^3$ ۹- $y=(-x+2)^3+1$ ۱۰- $y=(-\frac{x}{2}+1)^3$

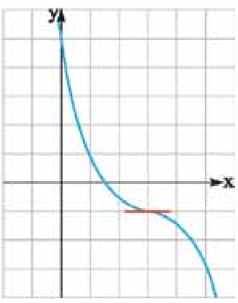
۱۱- با استفاده از نمودار $f(x)=x^3$ نمودار تابع $g(x)=x^3-6x^2+12x-11$ را رسم کنید.

۱۲- نمودارهای زیر انتقال‌یافتهٔ نمودار تابع $y=x^3$ یا $y=-x^3$ هستند، ضابطهٔ هر کدام را پیدا کنید.

الف) 

ب) 

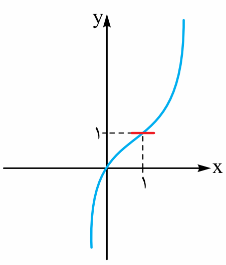
پ) 

ت) 

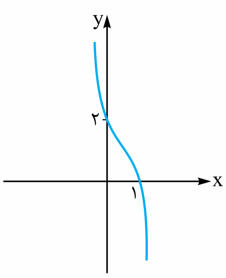
۱۳- نمودار تابع $y=-x^2$ و $y=-x^3$ را رسم کنید و بگویید در چه بازه‌هایی نمودار $y=-x^3$ بالای نمودار تابع $y=-x^2$ است.

۱۴- نمودار تابع $f(x)=x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ و k واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. دو نمودار یکدیگر را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع می‌کنند. k را بیابید.

۱۵- اگر نمودار روبه‌رو متعلق به تابع $f(x)=a(x+b)^3+c$ باشد، نمودار تابع $g(x)=a(x-b)^3+c$ محور xها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

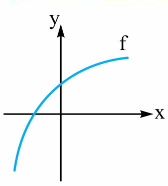


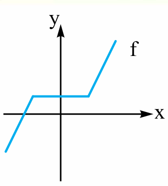
۱۶- اگر شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ باشد، مقدار $f(-1)$ را پیدا کنید.

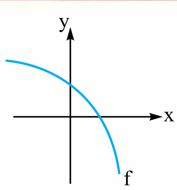


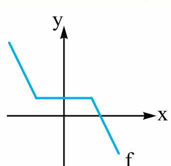
درس ۲: توابع صعودی و نزولی

به نمودارهای روبه‌رو نگاه کنید.


(الف)


(ب)


(پ)


(ت)

در نمودار **الف** با زیادشدن x، مقدار y هم زیاد می‌شود. اگر تابعی این‌چنین باشد، می‌گوییم اکیداً صعودی است *(اکیداً یعنی همواره و همیشه)*.

در تابع اکیداً صعودی داریم: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

در نمودار **ب** **با زیادشدن x ، مقدار y یا زیاد می‌شود و یا ثابت می‌ماند. این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست** (به علت این‌که بعضی‌وقت‌ها با زیادشدن x ، مقدار y ثابت می‌ماند). در تابع صعودی داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

در نمودار **پ** **با زیادشدن x، مقدار y کم می‌شود. به این تابع می‌گوییم اکیداً نزولی.** در تابع اکیداً نزولی داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

در نمودار **ت** **با زیادشدن x ، مقدار y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند. این تابع نزولی است اما اکیداً نزولی نیست.**

در تابع نزولی داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

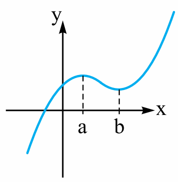
ساده‌ترش این‌که:

در تابع صعودی و اکیداً صعودی جهت تغییرات x و $f(x)$ یکسان است.

در تابع نزولی و اکیداً نزولی جهت تغییرات x و $f(x)$ مخالف یکدیگر است.

در تعریف تابع اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) مساوی نداریم، اما در تعریف تابع صعودی (یا نزولی) مساوی داریم.

حالا بیایید به نمودار تابع روبه‌رو نگاه کنیم:



تابع در بازهٔ $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $[a, b]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در کل تابع نه صعودی است و نه نزولی.

بیایید این‌طور جمع‌بندی کنیم:

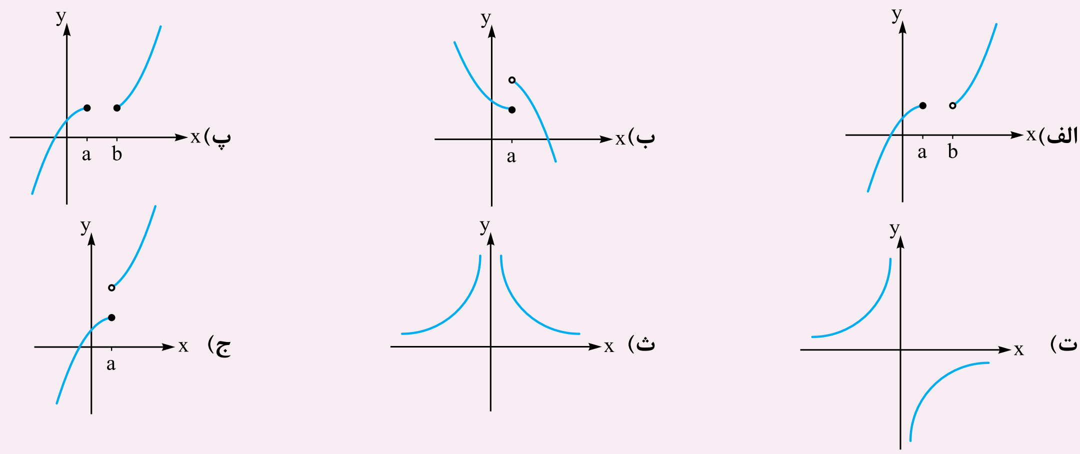
۱ اگر تابعی صعودی باشد (یا نزولی باشد) می‌گوییم یکنوا است. *(یکنوا یعنی جهت تغییرات y همواره یکسان است.)*

۲ اگر تابعی اکیداً صعودی باشد (یا اکیداً نزولی باشد) می‌گوییم اکیداً یکنوا است.

۳ اگر تابعی نه صعودی باشد و نه نزولی (یعنی در بعضی بازه‌ها صعودی و در بعضی بازه‌ها نزولی باشد) می‌گوییم غیریکنوا یا نایکنوا است.

۴ اگر تابعی هم صعودی باشد و هم نزولی، یعنی تابع ثابت است.

مثال: **تعیین کنید هر یک از تابع‌های زیر اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، صعودی، نزولی یا غیریکنوا است.**



پاسخ: در **الف** با زیاد شدن x مقدار y زیاد می‌شود پس تابع اکیداً صعودی است. اگر **پ** را با **الف** مقایسه کنیم، **پ** هم مثل **الف** است فقط با این تفاوت که عرض دو نقطه به طول‌های a و b یکسان‌اند، پس **پ** صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست (فقط به خاطر همین دو نقطه که عرض برابر دارند). در **ب** هر کدام از شاخه‌ها اکیداً نزولی است اما تابع در کل غیریکنوا است. چون اگر دو نقطهٔ نزدیک به a، یکی در سمت چپ و یکی در سمت راست آن انتخاب کنیم، با افزایش x مقدار y هم زیاد می‌شود و هم کم، پس تابع نه صعودی است و نه نزولی. **ت** هم مثل **ب** است. اگرچه هر کدام از شاخه‌های منحنی صعودی‌اند، اما اگر دو نقطه یکی با طول منفی و دیگری با طول مثبت انتخاب کنیم عرض نقطه کم می‌شود. در **ث** چون یکی از شاخه‌ها صعودی و دیگری نزولی است پس تابع غیریکنوا است. **ج** یک تابع اکیداً صعودی است، چون مقدار y همواره در حرکت از چپ به راست زیاد می‌شود.

نکته: چند نکته در مورد یکنوایی تابع:

۱ هر تابع اکیداً یکنوا حتماً یکنوا هم هست، اما عکس این موضوع درست نیست.

۲ اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد حتماً یک‌به‌یک نیز هست اما باز هم عکس این موضوع درست نیست، یعنی ممکن است تابعی یک‌به‌یک باشد ولی یکنوا نباشد. (مثل شکل **ث** مثال قبل)

۳ اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد حتماً اکیداً یکنوا نیست.

مثال: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید و در جاهای خالی کلمه‌ای بنویسید که عبارت درست باشد.

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. *(نهایی دی ۹۷ و خرداد ۹۹)*

ب) تابع $y=(x+1)^3$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی ـ نزولی) است. *(نهایی خرداد ۹۸)*

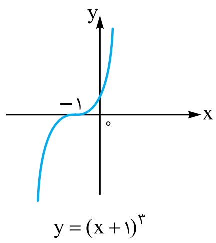
پ) تابع $y=-x^3+2$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. *(نهایی شهریور ۹۸)*

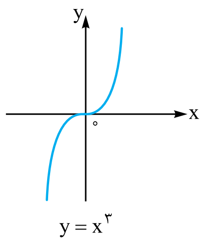
ت) توابع اکیداً یکنوا همواره .... هستند. *(نهایی شهریور ۹۹)*

ث) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

پاسخ: الف درست

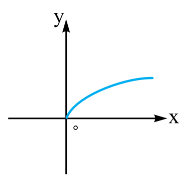
ب (صعودی) نمودار تابع $y=(x+1)^3$ انتقال‌یافتهٔ نمودار تابع $y=x^3$ به اندازهٔ ۱ واحد در راستای محور xها به سمت چپ است: پس چون $y=x^3$ تابعی است صعودی، تابع $y=(x+1)^3$ هم صعودی است.





پ نادرست، تابع $y=-x^3+2$ انتقال‌یافتهٔ نمودار تابع $y=-x^3$ به اندازهٔ ۲ واحد در راستای محور yها است، پس چون تابع $y=-x^3$ نزولی است پس تابع $y=-x^3+2$ هم نزولی است.

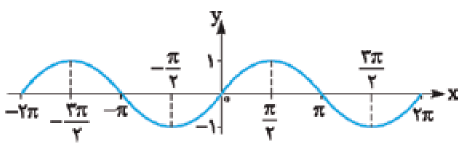
ت یک‌به‌یک؛ ث نادرست، نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت



است، پس این تابع در دامنهٔ تعریفش اکیداً صعودی است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید و تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است.

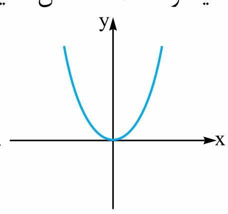
پاسخ: رسم نمودار تابع $y=\sin x$ را از سال قبل یاد گرفتیم. *(یادتان هست؟!)*، پس:



حالا جهت تغییرات تابع را در هر کدام از بازه‌های به طول $\frac{\pi}{2}$ (یعنی ربع دایرهٔ مثلثاتی) در یک جدول مشخص می‌کنیم:

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y=\sin x$		صعودی		نزولی		نزولی		صعودی		صعودی		نزولی		نزولی		صعودی	

محدودکردن دامنهٔ تابع برای یکنواشدن تابع در تابع‌هایی که یکنوا نیستند، اگر بتوانیم بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یکنوا است مشخص کنیم، با تعریف تابع در این بازه‌ها (به عنوان دامنهٔ محدودشدهٔ تابع) یک تابع یکنوا خواهیم داشت. مثلاً تابع $y=x^2$ با نمودار



یکنوا نیست، چون تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است؛ پس اگر تابع را به شکل $y=x^2, x\geq 0$ یا $y=x^2, x\leq 0$ تعریف کنیم، تابع‌هایی یکنوا خواهیم داشت.

مثال: تابع $f(x)=|x-1|+|x-3|$ را در بزرگ‌ترین دامنه‌هایی تعریف کنید که:

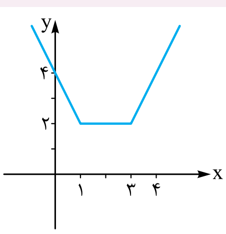
الف) اکیداً نزولی باشد. ب) اکیداً صعودی باشد. پ) نزولی باشد. ت) صعودی باشد. ث) ثابت باشد.

پاسخ: اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

(با روش نقطه‌یابی

۴	۳	۱	۰
۴	۲	۲	۴

)



حالا با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع را برای هر کدام از شرط‌ها می‌نویسیم:

توجه کنید که در بازهٔ $[1,3]$ تابع ثابت است، پس باید این بازه را برای حالت‌های نزولی و صعودی در نظر بگیریم.

الف $(-\infty,1]$: اکیداً نزولی — ب $[3,+\infty)$: اکیداً صعودی — پ $(-\infty,3]$: نزولی

ت $[1,+\infty)$: صعودی — ث $[1,3]$: ثابت

سؤال‌های امتحانی

■ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱۷- اگر برای هر x متعلق به دامنهٔ f، $x_1 < x_2$ و در نتیجه $f(x_1) < f(x_2)$ باشد؛ تابع f صعودی است.

۱۸- تابعی وجود ندارد که هم صعودی باشد و هم نزولی.

۱۹- اگر $f(x)$ یک تابع یک‌به‌یک باشد؛ آن‌گاه f حتماً یکنوا است.

۲۰- تابع $f(x) = x^3$، تابع اکیداً صعودی است. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

۲۱- بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

۲۲- تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست. (نهایی شهریور ۱۴۰۲)

■ نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است و آیا تابع در کل یکنوا (یا اکیداً یکنوا) هست یا نه؟ دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

۲۳- $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$

۲۴- $g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \le 0 \\ 2 & 0 < x \le 1 \\ x+2 & 1 < x \end{cases}$

۲۵- $h(x) = x^2 - 2x + 2$

۲۶- $k(x) = \sqrt{x-2} + 1$

۲۷- $t(x) = \frac{x+2}{x}$

۲۸- $p(x) = 2\sin x - 1 \quad [0, 2\pi]$

۲۹- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le -2 \\ 4 & -2 \le x \le 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده و سپس تعیین کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی و یا ثابت است.

۳۰- تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x < -3 \\ 4 & -3 \le x < 2 \\ x^2 & x \ge 2 \end{cases}$ را رسم کرده و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است را مشخص کنید.

۳۱- تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+a & x \ge 1 \\ x+2a+3 & x < 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. حدود a را پیدا کنید.

۳۲- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 + 2 & x < 0 \\ x+a & 0 \le x < 1 \\ 2x^2 + 3a - 1 & x \ge 1 \end{cases}$ روی دامنه‌اش اکیداً یکنوا باشد، حدود a را تعیین کنید.

۳۳- نمودار تابع‌های $f(x) = x|x|$ و $g(x) = x^2|x|$ را رسم کنید و بگویید هر کدام در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی‌اند.

■ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید و بگویید چگونه‌اند؟ صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا غیریکنوا؟

۳۴- $f(x) = x + |x|$

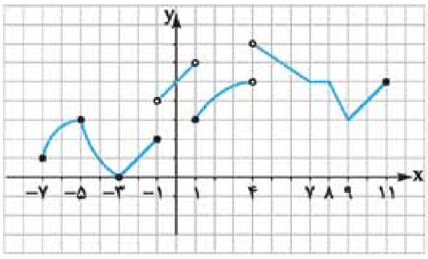
۳۵- $g(x) = x - |x|$

۳۶- $h(x) = x - [x]$

۳۷- $k(x) = x + [x]$

۳۸- نمودار تابع‌های $y = 2^x + 1$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید و بگویید صعودی‌اند یا نزولی؟ سپس با توجه به آن‌چه در سال یازدهم در مورد نمودار تابع $y = a^x$ یاد گرفته‌اید، بگویید تابع $y = a^x$ با چه شرطی اکیداً صعودی و با چه شرطی اکیداً نزولی است.

۳۹- نمودار تابع‌های $y = \log_2 x$ و $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید و بگویید صعودی‌اند یا نزولی؟ سپس با توجه به آن‌چه در سال یازدهم در مورد نمودار تابع $y = \log_a x$ یاد گرفته‌اید، بگویید تابع $y = \log_a x$ با چه شرطی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.



۴۰- تعیین کنید تابع با نمودار مقابل در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی است.
(بزرگ‌ترین بازه‌هایی را که ممکن است انتخاب کنید)

۴۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+2x$، دامنهٔ تابع را چگونه تعریف کنیم که تابع در دامنه‌اش اکیداً صعودی باشد.

۴۲- بگویید تابع $f(x)=-x^2+4x-3$ در هر کدام از بازه‌های زیر چگونه است؟ اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، غیریکنوا؟

الف) $[0,+\infty)$	ب) $(-\infty,0]$	پ) $[1,3]$
ت) $[2,4]$	ث) $[0,2]$	ج) $[-1,1]$

۴۳- تابع $y=|x^2-2x|$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a را پیدا کنید.

درس ۳: ترکیب توابع

پارسال با اعمال جبری بین تابع‌ها آشنا شدیم. مثلاً اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داشتیم می‌توانستیم دو تابع را *(مثل دو عدد)* با هم جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کنیم:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x) \quad \text{یا} \quad (f.g)(x)=f(x)\times g(x) \quad \text{یا} \quad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

حالا می‌خواهیم دربارهٔ عملی حرف بزنیم به اسم ترکیب توابع. *(این‌با کلمهٔ ترکیب هیچ ربطی به تجزیه و ترکیب و ... و عربی و فارسی و شیمی و ... ندارد)*

تعریف: اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داشته باشیم و به جای x یکی از تابع‌ها، ضابطه یا مقدار تابع دیگر را قرار دهیم، می‌گوییم دو تابع را ترکیب کرده‌ایم:

$$f(x) \quad \text{و} \quad g(x) \Rightarrow f(g(x))=(fog)(x)$$
($g(x)$ را می‌گذاریم به جای x)

$$f(x) \quad \text{و} \quad g(x) \Rightarrow g(f(x))=(gof)(x)$$
($f(x)$ را می‌گذاریم به جای x)

ترکیب دو تابع f و g را با $(fog)(x)$ یا $(gof)(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال: اگر $f=\{(1,2),(2,-1),(3,1),(4,2)\}$ و $g=\{(1,-2),(2,3),(5,2),(-1,3)\}$ باشد، fog و gof را پیدا کنید.

پاسخ: برای پیداکردن fog اول می‌رویم سراغ تابع g، می‌بینیم که در تابع g به هر کدام از مقدارهای x، چه مقداری نسبت داده می‌شود و بعد با توجه به تابع f، مقدار تابع f را به ازای yهای تابع g پیدا می‌کنیم:

g		f	
۱	→ -۲	→	تعریف‌نشده
۲	→ ۳	→	۱
۵	→ ۲	→	-۱
-۱	→ ۳	→	۱

$$\Rightarrow (fog)=\{(2,1),(5,-1),(-1,1)\}$$

حالا gof را هم پیدا می‌کنیم. منتها این بار، اول می‌رویم سراغ f و بعد g:

f		g	
۱	→ ۲	→	۳
۲	→ -۱	→	۳
۳	→ ۱	→	-۲
۴	→ ۲	→	۳

$$\Rightarrow (gof)=\{(1,3),(2,3),(3,-2),(4,3)\}$$

نکته: همان‌طورکه در مثال بالا دیدیم، ممکن است fog یا gof به ازای بعضی از xها تعریف نشوند و هم‌چنین fog و gof در حالت کلی برابر نیستند.

پیداکردن ضابطه و دامنهٔ ترکیب دو تابع

اگر ضابطهٔ جبری دو تابع f و g را داشته باشیم، برای پیداکردن ضابطهٔ ترکیب دو تابع در یکی از تابع‌ها *(تابع بیرونی)*، به جای x، ضابطهٔ تابع دیگر *(تابع درونی)* را قرار می‌دهیم:

$$(\underset{\text{تابع بیرونی}}{g}\ o\ \underset{\text{تابع درونی}}{f})(x)=g(f(x)) \qquad (\underset{\text{تابع بیرونی}}{f}\ o\ \underset{\text{تابع درونی}}{g})(x)=f(g(x))$$

یا به عبارت ساده‌تر، در تابع بیرونی به جای x، ضابطهٔ تابع درونی را جایگزین می‌کنیم.

۱۲۴- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x\geq ۰\\ \frac{۱}{۲}x-۱ & x<۵\end{cases}$ و تابع وارونش $(f^{-۱})$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و مختصات نقاط برخورد نمودارهای f و $f^{-۱}$ را تعیین کنید.

دامنهٔ هر کدام از تابع‌های زیر را طوری تعریف کنید که تابعی یک‌به‌یک به دست بیاید و سپس برای هر کدام دو تابع وارون به دست آورید. دامنه و برد تابع‌های تعریف‌شده و تابع وارون را تعیین کنید.

۱۲۵- $f(x)=|x-۳|+۱$ ‏ ۱۲۶- $g(x)=-x^{۲}+۱$ ‏ ۱۲۷- $h(x)=x^{۲}+۲x+۲$

۱۲۸- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=x^{۲}+۴x+۳$ برابر $[-۲,+\infty)$ باشد، ضابطه و دامنهٔ تابع وارون را به دست آورید. *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

۱۲۹- الف) نمودار تابع $f(x)=۲\sqrt{x-۱}-۳$ را رسم کنید و نشان دهید وارون‌پذیر می‌باشد و دامنه و برد تابع وارون را بنویسید.

ب) ضابطهٔ وارون را به دست آورید.

۱۳۰- اگر $f(x)=x\sqrt{x}-۳x+۳\sqrt{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را پیدا کنید.

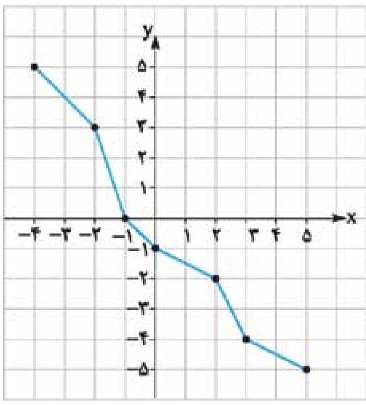
۱۳۱- اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳)\}$، مطلوب است $(fof^{-۱})$.

۱۳۲- اگر $f(x)=۳x+۱$ و $g(x)=x^{۳}-۱$ باشند، حاصل موارد زیر را به دست آورید.

الف) $(f^{-۱}og^{-۱})(۰)$ ‏ ب) $(gof)^{-۱}(-۹)$ ‏ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۱)$

ت) $(fog)^{-۱}(-۵)$ ‏ ث) $(f^{-۱}of^{-۱})(-۵)$ ‏ ج) $(gog)^{-۱}(-۹)$

۱۳۳- با استفاده از نمودار تابع f موارد خواسته‌شده را بیابید.



$f^{-۱}(۵)\,,\,f^{-۱}(-۵)$

$f^{-۱}(۳)\,,\,f^{-۱}(-۴)$

$(f^{-۱}of^{-۱})(۳)\,,\,(f^{-۱}of^{-۱})(-۵)$

$(fof^{-۱})(۳)\,,\,(f^{-۱}of)(۰)$

۱۳۴- اگر تابع $f(x)=ax+b$ وارون خودش باشد، در مورد a و b چه می‌توان گفت؟

۱۳۵- اگر $f(x)=x^{۳}+۳x$ و بدانیم تابع f یک‌به‌یک است، حاصل $f^{-۱}(۰)+f^{-۱}(۴)$ را پیدا کنید.

۱۳۶- نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ و تابع وارونش را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. مختصات نقاط برخورد نمودار f و $f^{-۱}$ را تعیین کنید.

۱۳۷- به دو روش نشان دهید دو تابع $f(x)=x^{۲}+۲\,,\,x\leq ۰$ و $g(x)=-\sqrt{x-۲}$ وارون یکدیگرند.

۱۳۸- اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}+۱$ باشد، نمودار دو تابع $g(x)=(fof^{-۱})(x)$ و $h(x)=(f^{-۱}of)(x)$ را رسم کنید.

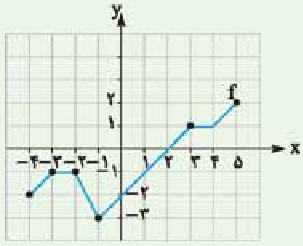
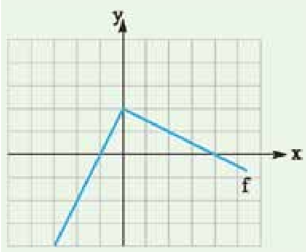
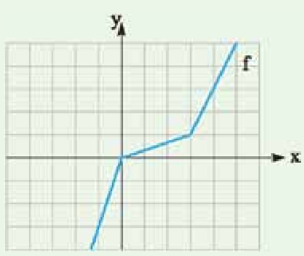
۱۳۹- اگر $f(x)=۱-\sqrt{x-۲}$ باشد، جواب هر یک از معادلات زیر را پیدا کنید.

الف) $(fof^{-۱})(x)=۰$ ‏ ب) $(fof^{-۱})(x)=۲$ ‏ پ) $(f^{-۱}of)(x)=۱$ ‏ ت) $(f^{-۱}of)(x)=۳$

۱۴۰- اگر $f=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۵)\}$، $g(x)=x^{۳}-۵$ و $f^{-۱}(g^{-۱}(a))=۱$ باشد، مقدار a را پیدا کنید.

۱۴۱- اگر $f(x)=x^{۳}+۶x^{۲}+۱۲x-۱۷$، $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(۴,۳),(۲,۴)\}$ و $(gof^{-۱})(a)=(f^{-۱}of)(a)$ باشد، مقدار a را پیدا کنید.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	رشتهٔ علوم تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) هر تابع یکنوا وارون‌پذیر است. ب) برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x+۱)$ ابتدا نمودار f را در راستای محور xها با نسبت $\frac{۱}{۲}$ منقبض و سپس نمودار را در راستای محور xها ۱ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. پ) برد تابع‌های چندجمله‌ای از درجهٔ زوج برابر $\mathbb{R}$ نیست.				۰/۷۵
۲	نمودار تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x$ از کدام ناحیه‌های مختصات عبور نمی‌کند؟				۱
۳	نامعادلهٔ $x^{۳}+x^{۲}\geq ۰$ را با روش رسم حل کنید.				۰/۷۵

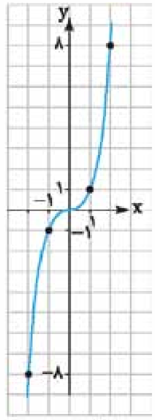
۴	نمودار تابع $f(x)=۲\|x^۳\|+\|x^۳-۱\|$ را رسم کنید و از روی نمودار بگویید تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی و اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.	۱
۵	نمودار تابع f به شکل زیر و تابع g به صورت $g=\{(-۳,۴),(-۱,۲),(۰,-۴),(۱,-۱),(۲,۰)\}$ داده شده‌اند. تابع fog را پیدا کنید. 	۱
۶	اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x^۲-۲x}$ باشند، دامنهٔ تابع gof را بیابید.	۱
۷	اگر $f(x)=x^۲-۲x$ و $g(x)=x+۱$، جواب‌های معادلهٔ $(fogof)(x)=۰$ را پیدا کنید.	۱/۵
۸	تابع $f(x)=x-\sqrt{x-۲}$ را به شکل ترکیب دو تابع بنویسید.	۱
۹	شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=\|-\frac{۱}{۲}f(\frac{۱}{۲}x+۲)\|$ را رسم کنید. 	۱/۵
۱۰	نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(۲,۴)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار دارند. اگر نمودار تابع $y=۲f(-\frac{۱}{۲}x+۱)$ را رسم کنیم، مختصات نقاط A' و B'، متناظر نقاط A و B به چه صورتی است؟	۱
۱۱	نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x-۱$ را در راستای محور xها ۲ واحد به سمت راست و سپس در راستای محورyها ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و آن‌گاه نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم و نمودار تابع به دست آمده را g می‌نامیم. ضابطهٔ تابع $g(x)$ را پیدا کنید.	۱/۵
۱۲	ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}-۱$ را پیدا کنید و سپس دامنه و برد تابع وارون را بیابید.	۱
۱۳	ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+۲\|x-۱\|$ را در بازه‌ای که نمودار تابع صعودی است، پیدا کنید.	۱
۱۴	ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۶ & x\geq ۰\\ ۲x+۱ & x<۰\end{cases}$ را پیدا کنید و سپس نقاط برخورد نمودار f و $f^{-۱}$ را بیابید.	۱/۵
۱۵	اگر $f(x)=x^۳-۱$ و $g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$ باشند، مقدار $(fog)(-۲)$ و $(gof^{-۱})(۷)$ را پیدا کنید.	۱
۱۶	شکل مقابل نمودار تابع f است. اگر $g(x)=۳x-۱$ باشد، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲)$ را پیدا کنید. 	۱
۱۷	اگر تابع $f(x)=x^۲-۲x$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ وارون‌پذیر باشد، اولاً حداکثر a را بیابید و ثانیاً ضابطهٔ تابع وارون f و دامنه و برد آن را در این بازه پیدا کنید.	۱/۵
۱۸	اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد، نمودار تابع‌های $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را رسم کنید.	۱
	مجموع نمرات	۲۰

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱. درست است، دامنه و برد توابع چندجمله‌ای درجهٔ فرد برابر $\mathbb{R}$ است.

۲. درست **۳.** درست **۴.** درست

۵. نادرست **۶.** درست



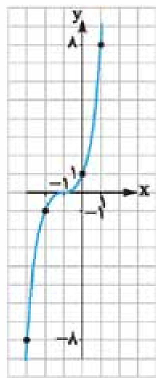
$y=x^3$

اول نمودار تابع $y=x^3$ را رسم می‌کنیم و بعد کارهایی را که باید روی نمودار x^3 انجام دهیم تا به نمودار تابع‌های داده‌شده برسیم مشخص می‌کنیم:

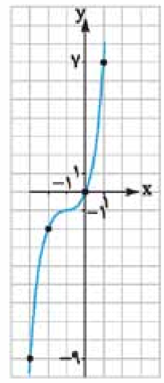
۷. $y=(x+1)^3-1$

۱ انتقال (-1) واحد در راستای محور xها

۲ و انتقال (-1) واحد در راستای محور yها



۱

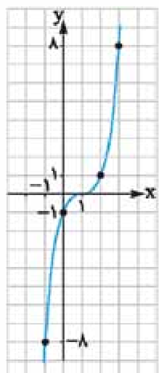


۲

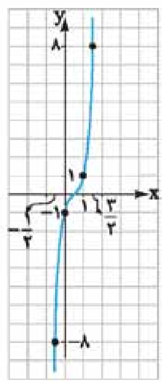
۸. $y=(2x-1)^3$

۱ انتقال $(+1)$ واحد در راستای محور xها

۲ انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور xها



۱



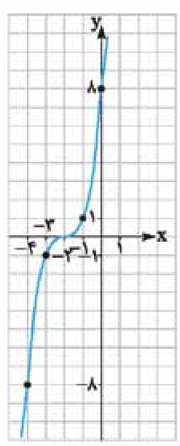
۲

۹. $y=(-x+2)^3+1$

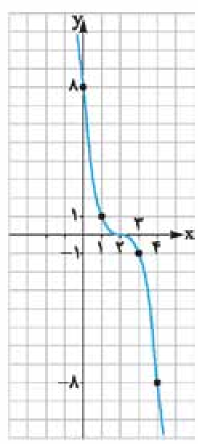
۱ انتقال (-2) واحد در راستای محور xها

۲ تقارن نسبت به محور yها

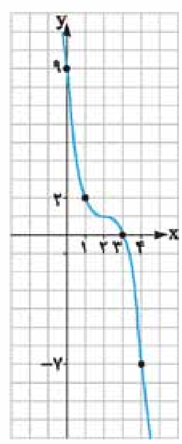
۳ انتقال $(+1)$ واحد در راستای محور yها



۱



۲



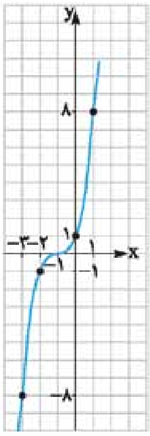
۳

۱۰. $y=(-\frac{x}{2}+1)^3$

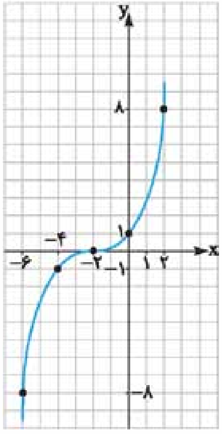
۱ انتقال (-1) واحد در راستای محور xها

۲ انبساط با نسبت ۲ در راستای محور xها

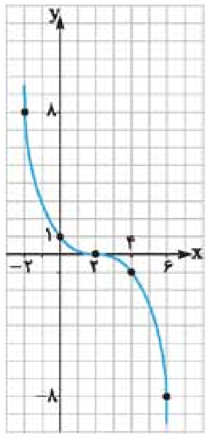
۳ تقارن نسبت به محور yها



۱



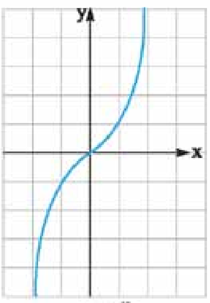
۲



۳

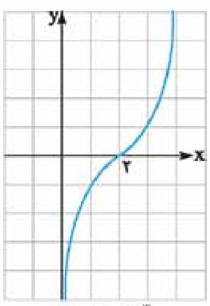
۱۱. برای رسم نمودار تابع $g(x)=x^3-6x^2+12x-11$، ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$، را با استفاده از اتحاد $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ساده می‌کنیم: $g(x)=x^3-6x^2+12x-8-3=(x-2)^3-3$

حالا نمودار تابع $g(x)=(x-2)^3-3$ را با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$ رسم می‌کنیم:



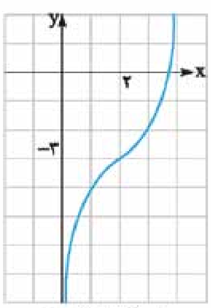
$y=x^3$

انتقال به اندازهٔ (+۲) واحد در راستای محور xها



$y=(x-2)^3$

انتقال به اندازهٔ (−۳) واحد در راستای محور yها



$y=(x-2)^3-3$

۱۲. در شکل (الف) مبدأ مختصات به نقطهٔ $(1,2)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع را ۱ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم:

$$y=x^3 \xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}} y=(x-1)^3 \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y=(x-1)^3+2$$

در شکل (ب) مبدأ مختصات به نقطهٔ $(-2,1)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع $y=x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

$$y=x^3 \xrightarrow{\text{۲واحد به چپ}} y=(x+2)^3 \xrightarrow{\text{۱واحد به بالا}} y=(x+2)^3+1$$

در شکل (پ) اولاً نمودار شبیه نمودار $y=-x^3$ است و ثانیاً مبدأ مختصات به نقطهٔ $(-1,2)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع $y=-x^3$ را ۱ واحد به سمت چپ و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم:

$$y=-x^3 \xrightarrow{\text{۱واحد به چپ}} y=-(x+1)^3 \xrightarrow{\text{۲واحد به بالا}} y=-(x+1)^3+2$$

در شکل (ت) اولاً نمودار شبیه نمودار تابع $y=-x^3$ است و ثانیاً مبدأ مختصات به نقطهٔ $(3,-1)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع $y=-x^3$ را ۳ واحد به سمت راست و ۱ واحد به پایین انتقال دهیم:

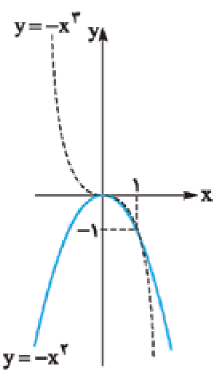
$$y=-x^3 \xrightarrow{\text{۳واحد به سمت راست}} y=-(x-3)^3 \xrightarrow{\text{۱واحد به پایین}} y=-(x-3)^3-1$$

۱۳. اگر نمودار هر دو تابع را رسم کنیم می‌بینیم که‌در: بازهٔ $x<0 \Leftarrow$ نمودار $y=-x^3$ بالای نمودار $y=-x^2$ است.

در بازهٔ $x<0$ و $0<x<1 \Leftarrow$ نمودار $y=-x^3$ بالای نمودار $y=-x^2$ است.

در بازهٔ $1<x \Leftarrow$ نمودار $y=-x^3$ پایین نمودار $y=-x^2$ است.

نمودار دو تابع در $x=0$ و $x=1$ مشترک‌اند (عرض‌های مساوی دارند).



۱۴. اول انتقال‌های داده‌شده را انجام می‌دهیم:

$$f(x)=x^3 \xrightarrow[\text{سمت چپ}]{\text{۲ واحد به}} y_1=(x+2)^3$$

$$\xrightarrow[\text{سمت پایین}]{\text{kواحد به}} y_2=(x+2)^3-k$$

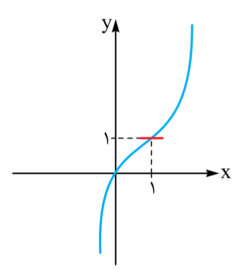
حالا دو نمودار باید در نقطه‌ای به عرض ۱− مشترک باشند:

$$f(x)=x^3 \xrightarrow{y=-1} -1=x^3 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1,-1)$$

پس نقطهٔ $(-1,-1)$ باید روی نمودار $y=(x+2)^3-k$ باشد:

$$-1=(-1+2)^3-k \Rightarrow -1=1-k \Rightarrow k=2$$

۱۵. با توجه به نمودار مشخص است که تابع $f(x)=a(x+b)^3+c$ انتقال‌یافتهٔ تابع $y=ax^3$ به اندازهٔ ۱ واحد در راستای محور xها و ۱ واحد در راستای محور yها است؛ پس باید به شکل $f(x)=a(x-1)^3+1$ باشد، یعنی $b=-1$ و $c=1$. از طرف دیگر نمودار از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:



$$(0,0) \Rightarrow 0=a(0-1)^3+1 \Rightarrow 0=-a+1 \Rightarrow a=1$$

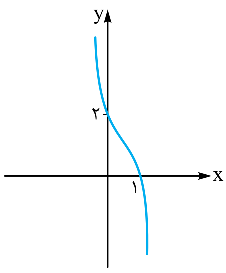
حالا ضابطهٔ تابع $g(x)=a(x-b)^3+c$ را می‌نویسیم و با محور xها قطع می‌دهیم:

$$g(x)=(x+1)^3+1 \xrightarrow{y=0} (x+1)^3+1=0$$

$\Rightarrow$ نقطهٔ برخورد $(-2,0)$

$$\Rightarrow (x+1)^3=-1 \Rightarrow x+1=-1 \Rightarrow x=-2$$

۱۶. نمودار داده‌شده مربوط به تابع $y=a(x-x_1)^3$ است. چون نمودار شبیه نمودار تابع $y=x^3$ است که با تبدیل تقارن نسبت به محور xها و انتقال به نمودار داده‌شده تبدیل شده است، پس با توجه به نقطهٔ $(1,0)$ باید ضابطه‌اش به شکل $y=a(x-1)^3$ باشد. حالا چون نقطهٔ $(0,2)$ روی نمودار قرار دارد، پس:



پس: $(0,2) \Rightarrow 2=a(0-1)^3 \Rightarrow a=-2$

پس داریم $f(x)=-2(x-1)^3$، حالا $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(-1)=-2(-1-1)^3=(-2)(-8)=16$$

۱۷. درست است، گزارهٔ داده‌شده تعریف تابع اکیداً صعودی است پس تابع صعودی نیز هست.

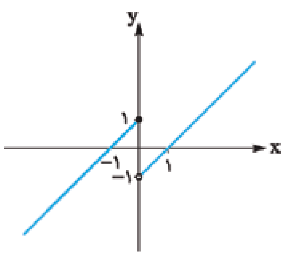
۱۸. نادرست است، تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی.

۱۹. نادرست است، مثلاً $y=\frac{1}{x}$ یک‌به‌یک است اما نه صعودی است و نه نزولی.

۲۰. درست **۲۱.** درست **۲۲.** نادرست

۲۳.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$$



صعودی $(-\infty,0]$

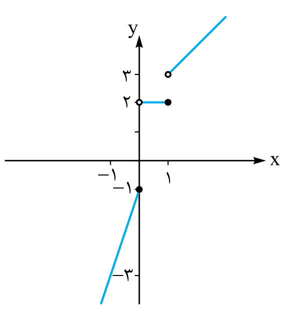
صعودی $(0,+\infty)$

تابع در کل غیریکنوا است.

دامنه $=\mathbb{R}$ ، برد $=\mathbb{R}$

۲۴.

$$g(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\le 0 \\ 2 & 0<x\le 1 \\ x+2 & 1<x \end{cases}$$



اکیداً صعودی $(-\infty,0]$

ثابت $(0,1]$

اکیداً صعودی $(1,+\infty)$

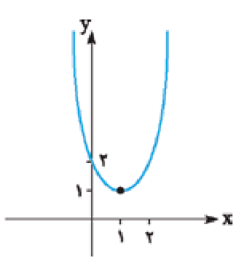
$\Rightarrow$ درکل صعودی

دامنه $=\mathbb{R}$

برد $=(-\infty,-1]\cup\{2\}\cup(3,+\infty)$

۲۵.

$$h(x)=x^2-2x+2 \Rightarrow h(x)=(x-1)^2+1$$



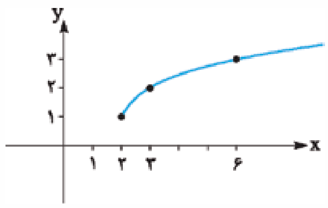
نزولی $(-\infty,1]$

صعودی $[1,+\infty)$

$\Rightarrow$ در کل غیریکنوا

دامنه $=\mathbb{R}$ ، برد $=[1,+\infty)$

.۲۶ $k(x)=\sqrt{x-۲}+۱$



صعودی $[۲,+\infty)$

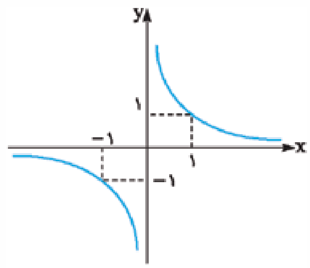
$\Rightarrow$ در کل اکیداً صعودی

$[۲,+\infty)=$ دامنه

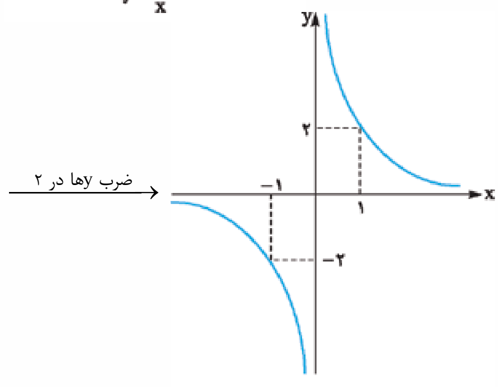
$[۱,+\infty)=$ برد

.۲۷ $t(x)=\dfrac{x+۲}{x}=۱+\dfrac{۲}{x}$

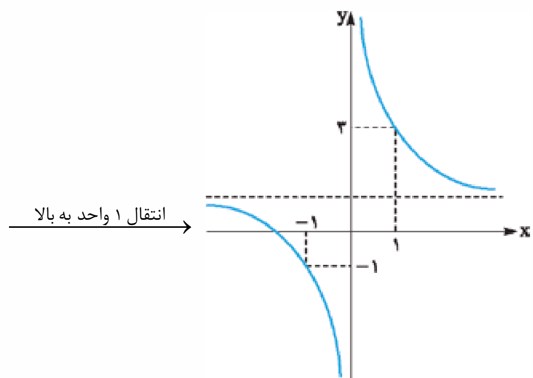
نمودار تابع $y=\dfrac{۱}{x}$ را بلدیم. با انجام تبدیل‌های زیر، نمودار تابع $t(x)=۱+\dfrac{۲}{x}$ را رسم می‌کنیم.



$y=\dfrac{۱}{x}$



$y=\dfrac{۲}{x}$

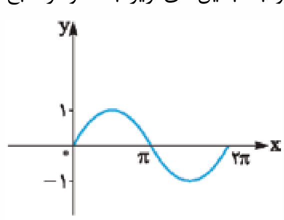


$y=۱+\dfrac{۲}{x}$

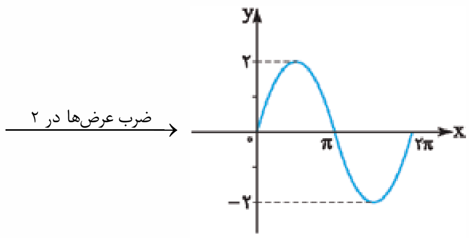
حالا با توجه به نمودار، تابع در کل غیریکنوا است و در بازهٔ $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. دامنه برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ و برد برابر $\mathbb{R}-\{۱\}$ است.

.۲۸ $p(x)=۲\sin x-۱ \quad [۰,۲\pi]$

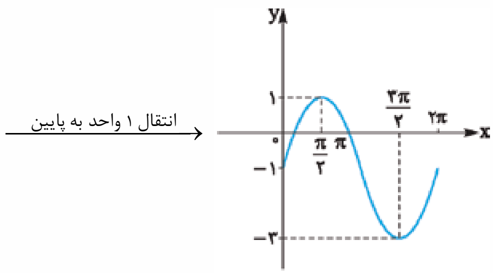
نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم و با تبدیل‌های زیر به نمودار تابع $p(x)=۲\sin x-۱$ می‌رسیم:



$y=\sin x$



$y=۲\sin x$

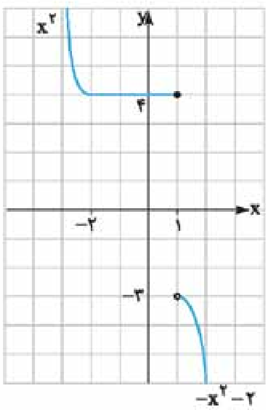


$y=۲\sin x-۱$

با توجه به نمودار، تابع غیریکنوا است و در بازه‌های $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ اکیداً نزولی است. دامنهٔ تابع با توجه به بازهٔ داده‌شده برابر $[۰,۲\pi]$ و برد تابع برابر بازهٔ $[-۳,۱]$ است.

.۲۹ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

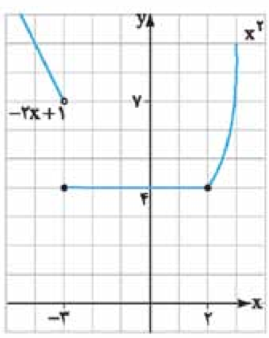
$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۲ \\ ۴ & -۲\le x\le ۱ \\ -x^۲-۲ & x>۱ \end{cases}$$



حالا با توجه به نمودار تابع در بازهٔ $(-\infty,۱]$ نزولی، در بازهٔ $[-۲,۱]$ ثابت و در بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی است. در کل، تابع در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ نزولی است.

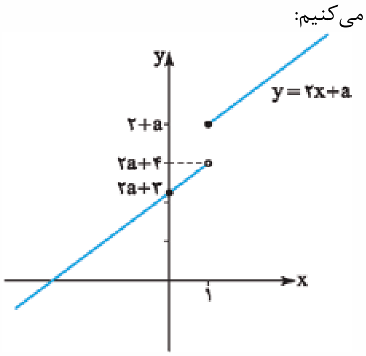
.۳۰ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -۲x+۱ & x<-۳ \\ ۴ & -۳\le x<۲ \\ x^۲ & x\ge ۲ \end{cases}$$



حالا با توجه به نمودار بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است عبارت است از $(-\infty,۲]$.

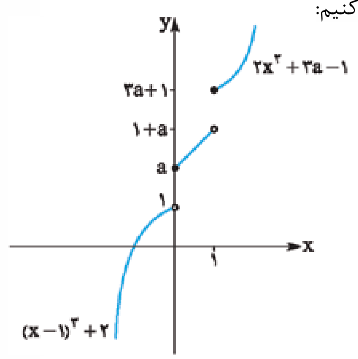
.۳۱ نمودار فرضی تابع را رسم می‌کنیم:



برای این‌که تابع صعودی اکید باشد، باید $۲a+۴\le ۲+a$ باشد. پس:

$۲a+۴\le ۲+a \Rightarrow a\le -۲$

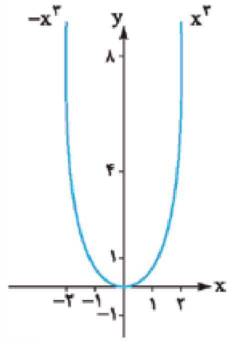
۳۲. اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



حالا چون $(x-1)^3+2$ اکیداً صعودی است، پس تابع باید اکیداً صعودی باشد؛ یعنی اولاً $a\ge 1$ و ثانیاً $3a+1\ge a+1$ باشد:

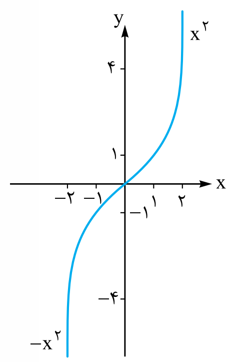
$$\begin{cases} a\ge 1 \\ 3a+1\ge a+1 \Rightarrow 2a\ge 0 \Rightarrow a\ge 0\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a\ge 1$$

۳۳. $g(x)=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\ge 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$



درکل غیریکنوا $\Leftarrow$ نزولی $(-\infty,0]$ صعودی $[0,+\infty)$

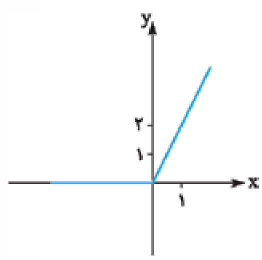
$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$



اکیداً صعودی $(-\infty,+\infty)$

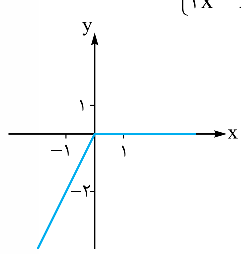
$\Leftarrow$ اکیداً صعودی

۳۴. $f(x)=x+|x|=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

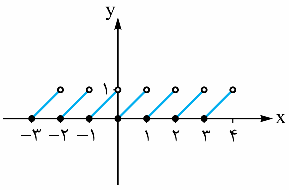
۳۵. $g(x)=x-|x|=\begin{cases}0 & x\ge 0\\ 2x & x<0\end{cases}$



تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست.

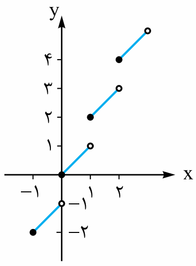
۳۶. $h(x)=x-[x]$

تابع نه صعودی است و نه نزولی

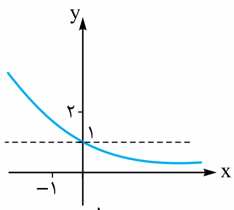


۳۷. $k(x)=x+[x]$

تابع اکیداً صعودی است.

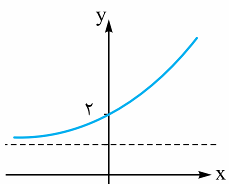


۳۸. تابع $y=a^x$ با شرط $a>1$ اکیداً صعودی و با شرط $0<a<1$ اکیداً نزولی است. اگر $a=1$ باشد، تابع به شکل $y=1$ تبدیل می‌شود که یک تابع ثابت است و هم صعودی است و هم نزولی.



$y=(\frac{1}{2})^x$

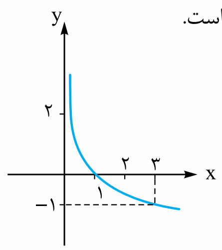
اکیداً نزولی



$y=2^x+1$

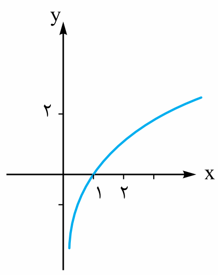
اکیداً صعودی

۳۹. تابع $y=\log_a x$ با شرط $a>1$ اکیداً صعودی و با شرط $0<a<1$ اکیداً نزولی است.



$y=\log_{\frac{1}{3}} x$

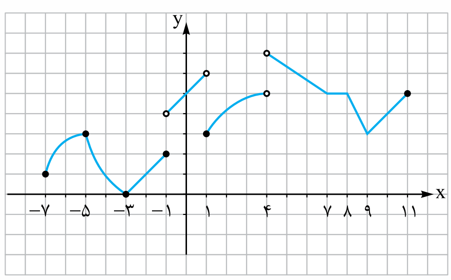
اکیداً نزولی



$y=\log_2 x$

اکیداً صعودی

۴۰.



نزولی $[-5,-3]$ ، صعودی $[-7,-5]$

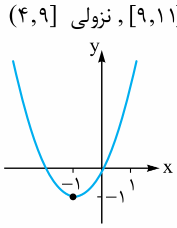
صعودی $(1,4]$ ، صعودی $[-3,1]$

صعودی $[9,11]$ ، نزولی $[4,9]$

۴۱. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

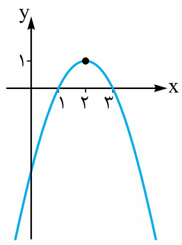
$$f(x)=x^2+2x \Rightarrow f(x)=(x+1)^2-1$$

حالا با توجه به نمودار تابع اگر بخواهیم تابع اکیداً صعودی باشد، باید دامنهٔ آن زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-1,+\infty)$ باشد.



۴۲. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=-x^۲+۴x-۳ \Rightarrow$$
$$f(x)=-(x^۲-۴x+۴)+۱$$
$$\Rightarrow f(x)=-(x-۲)^۲+۱$$



حالا با توجه به نمودار تابع:

الف) غیریکنوا $[۰,+\infty)$

ب) اکیداً صعودی $(-\infty,۰]$

پ) غیریکنوا $[۱,۳]$

ت) اکیداً نزولی $[۲,۴]$

ث) اکیداً صعودی $[۰,۲]$

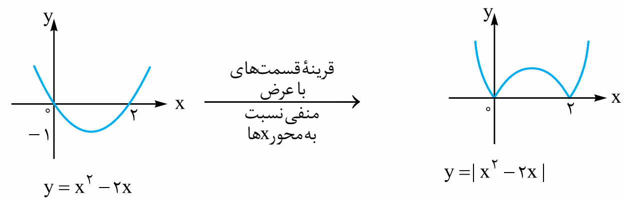
ج) اکیداً صعودی $[-۱,۱]$

۴۳. نمودار تابع $y=|x^۲-۲x|$ را با استفاده از نمودار تابع $y=x^۲-۲x$ رسم می‌کنیم. (برای رسم نمودار تابع $|f|$ باید قسمت‌های با عرض منفی نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه کنیم.)

$$y=x^۲-۲x \xrightarrow{\text{یک سهمی است}} x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲}{۲(۱)}=۱$$
$$\Rightarrow y_S=۱^۲-۲(۱)=-۱ \Rightarrow S(۱,-۱)$$

نقاط برخورد با محور xها $y=۰ \Rightarrow x^۲-۲x=۰$

$$\Rightarrow x(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۰\,,\,x=۲ \Rightarrow A(۰,۰)\,,\,B(۲,۰)$$



حالا با توجه به نمودار، کم‌ترین مقدار a برای این‌که تابع در بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد برابر است با $a=۲$.

۴۴. نادرست $((fog)(۱)=f(g(۱))=f(۲)=۵)$

۴۵. نادرست (مثلاً در توابع خطی با ضریب x برابر ۱)

۴۶. نادرست (مثلاً در دو تابع چندجمله‌ای دامنهٔ ترکیب‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.)

۴۷. ۲ (زیرا $(fof)(۲)=f(f(۲))=f(۳)=۲$)

۴۸. $\frac{۱}{۳}$ (چون $f(۱)=\frac{۱}{۲}\,,\,f(f(۱))=f(\frac{۱}{۲})=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}$)

۴۹. $(a=۱\,,b=۰)$ یا ($a=۰$ و b هر مقدار دلخواه)، زیرا:

$$(fof)(x)=f(ax+b)=a(ax+b)+b$$
$$=a^۲x+ab+b$$

اگر $a^۲x+ab+b$ بخواهد برابر $ax+b$ باشد، باید:

$$a^۲=a \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \Rightarrow ab+b=(۰)(b)+b=b \\ \text{یا} \\ a=۱ \Rightarrow ab+b=۲b=b \Rightarrow b=۰ \end{cases}$$

۵۰. چون $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ و $h(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۳=(f(x))^۳$؛ پس $g(x)$ باید برابر $g(x)=x^۳$ باشد و داریم $h(x)=(gof)(x)$.

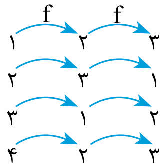
۵۱.
$$f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۰),(۴,-۱)\}$$
$$g=\{(-۱,۲),(۱,۰),(۲,۱),(-۲,۱)\}$$
$$fog=\{(-۱,۱),(۲,۲),(-۲,۲)\}$$
$$gof=\{(۱,۱),(۲,۰),(۴,۲)\}$$

۵۲.
$$f=\{(-۱,۰),(۱,-۱),(۲,۱),(-۲,۰)\}$$
$$g=\{(۰,۵),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲)\}$$
$$fog=\{(۳,۱)\}$$
$$gof=\{(-۱,۵),(۲,۳),(-۲,۵)\}$$

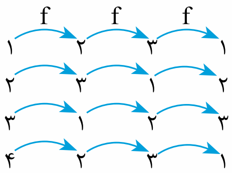
۵۳.
$$f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$$
$$g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$$
$$gof=\{(۰,۴),(۳,۷),(۵,۰)\}$$

۵۴. اگر از نمودار پیکانی استفاده کنیم کار راحت‌تر است:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۲)\}$$

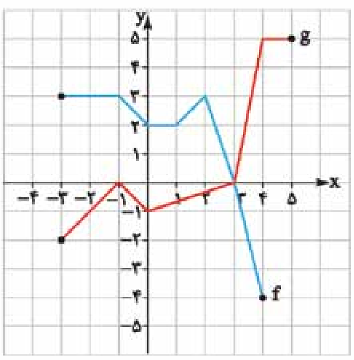
fof ⇒


$$\Rightarrow fof=\{(۱,۳),(۲,۱)(۳,۲),(۴,۳)\}$$

fofof ⇒


$$\Rightarrow fofof=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۱)\}$$

۵۵.



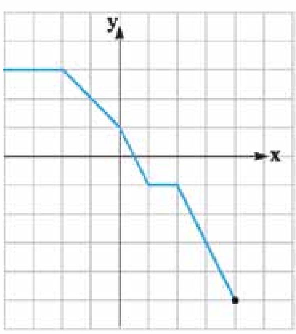
$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۵)=$ تعریف‌نشده

$(fog)(۰)=f(g(۰))=f(-۱)=۳$

$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۰)=-۱$

$(gof)(۴)=g(f(۴))=g(-۴)=$ تعریف‌نشده

۵۶.



$(fof)(-۴)=f(f(-۴))=f(۳)=-۳$

$(fof)(۰)=f(f(۰))=f(۱)=-۱$

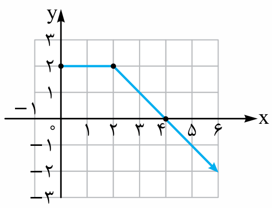
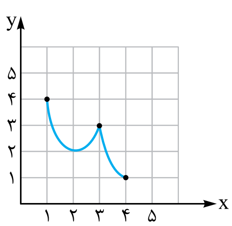
$(fof)(۵)=f(f(۵))=$ تعریف‌نشده

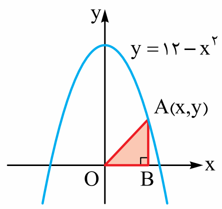
$(fof)(۲)=f(f(۲))=f(-۱)=۲$

۵۷. مقادیر f و g در جدول داده شده‌اند، پس می‌رویم سراغ محاسبهٔ موارد خواسته‌شده:

$$(gof)(۱)=g(\underbrace{f(۱)}_{۲})=\underbrace{g(۲)}_{-۴}=-۴$$

نمونهٔ امتحان نیم‌سال دوم	رشتهٔ علوم تجربی	ریاضی ۳	
ردیف	امتحان شمارهٔ ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳	Kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است. ب) تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است. پ) در تابع $f(x)=4+\sqrt{x-1}$ دامنهٔ تابع $y=(f^{-1}of)(x)$ برابر $[1,+\infty)$ است.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) تابع $g(x)=x^2-4x+5$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر .... است. ب) مقدار عددی عبارت $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ برابر .... است. پ) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل .... است.	۰/۷۵
۳	به کمک انتقال نمودار تابع $y=x^3$، نمودار تابع $f(x)=(x-2)^3+1$ را رسم کنید.	۰/۵
۴	در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f رسم شده است. الف) نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(2x)$ را رسم کنید. ب) مقدار $gof(0)$ را به دست آورید. 	۰/۷۵
۵	تابع $f(x)=\sqrt{x+4}-1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطهٔ تابع وارون آن را بیابید.	۱/۲۵
۶	اگر بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=a\sin(8x)+c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد: الف) مقادیر $\|a\|$ و c را بیابید. ب) دورهٔ تناوب تابع را به دست آورید.	۱/۵
۷	جواب‌های معادلهٔ $\cos(2x)=\frac{1}{2}$ را در بازهٔ $(0,\pi)$ به دست آورید.	۱/۲۵
۸	حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [ ] علامت جزء صحیح است.) الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{(x-5)^4}$ پ) $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{3-[x]}{x-3}$ ت) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$	۲
۹	اگر نمودار تابع f از نقطهٔ $A(2,4)$ بگذرد و $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$ باشد، معادلهٔ خط مماس بر نمودار f را در نقطهٔ A به دست آورید.	۱
۱۰	با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x)=\|x^2-4\|$ را در $x=2$ بیابید.	۱/۲۵
۱۱	مشتق تابع مقابل را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x)=(x-6)^3+\frac{5x+3}{\sqrt{2x-1}}$	۱/۲۵
۱۲	تابع $f(x)=x^2-x$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازهٔ $[0,2]$ به دست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازهٔ $[0,2]$ بزرگ‌تر باشد.	۱/۲۵
۱۳	در نمودار تابع زیر، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید. 	۱

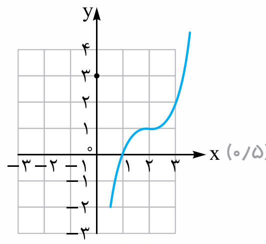
ردیف	امتحان شمارهٔ ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳	Kheilisabz.com	نمره
۱۴	مطابق شکل مقابل، نقطهٔ A در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات روی منحنی $y=12-x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطهٔ A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. 				۱/۷۵
۱۵	در یک بیضی فاصلهٔ کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.				۱/۲۵
۱۶	اگر مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+ax-4y-4=0$، نقطهٔ $O(1,2)$ باشد: الف) مقدار a را بیابید. ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.				۱
۱۷	سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که ۳تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶تای آن‌ها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟				۱/۵
	جمع نمرات				۲۰

پاسخنامهٔ تشریحی

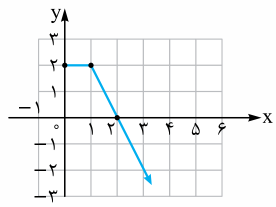
۱. الف درست (۰/۲۵) / ب نادرست (۰/۲۵) / پ درست (۰/۲۵)

۲. الف ۲ (۰/۲۵) / ب $\frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵) / پ سهمی (۰/۲۵)

۳.



۴. الف (۰/۲۵)



ب $\underbrace{g(f(۰))=g(۲)}_{(۰/۲۵)}=۰$ (۰/۲۵)

۵.

$y=\sqrt{x+۴}-۱ \Rightarrow y+۱=\sqrt{x+۴} \Rightarrow (y+۱)^۲=x+۴$

$\Rightarrow (y+۱)^۲-۴=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=(x+۱)^۲-۴$ (۰/۷۵)

$D_{f^{-۱}}=R_f=[-۱,+\infty)$ (۰/۵)

۶.

الف $|a|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۹-۳}{۲}=۳$ (۰/۵)

$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۹+۳}{۲}=۶$ (۰/۵)

ب $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۸}=\frac{\pi}{۴}$ (۰/۵)

۷.

$\cos ۲x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x=\cos(\frac{۲\pi}{۳})$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\ (x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳})$ (۰/۵)

$\xrightarrow{(۰,\pi)} x=\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}$ (۰/۵)

۸.

الف $\lim\limits_{x\to۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}=\lim\limits_{x\to۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)}=۲$ (۰/۵)

ب $\lim\limits_{x\to۵}\frac{۱}{(x-۵)^۴}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$ (۰/۵)

پ $\lim\limits_{x\to۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$ (۰/۵)

ت $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳}{۲x^۳}=-۳$ (۰/۵)

۹. فرض کنیم $y=ax+b$، خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ $(۲,۴)$ واقع بر آن باشد:

$\lim\limits_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۳ \Rightarrow f'(۲)=۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a=۳$ (۰/۲۵)

$y=۳x+b \xrightarrow{(۲,۴)} b=-۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y=۳x-۲$ (۰/۲۵)

۱۰.

$f'_-(۲)=\underbrace{\lim\limits_{x\to۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim\limits_{x\to۲^-}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}}_{(۰/۲۵)}$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to۲^-}\frac{-(x^۲-۴)}{x-۲}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim\limits_{x\to۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}}_{(۰/۲۵)}=-۴$ (۰/۲۵)

۱۱.

$f'(x)=\underbrace{۳(x-۶)^۲}_{(۰/۲۵)}+\frac{\overbrace{۵(\sqrt{۲x}-۱)}^{(۰/۲۵)}-\overbrace{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}-۱}(۵x+۳)}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{(\sqrt{۲x}-۱)^۲}_{(۰/۲۵)}}$ (۰/۲۵)

۱۲.

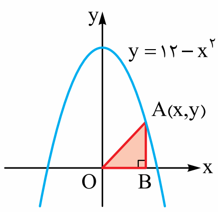
الف $[۰,۲]$ آهنگ متوسط در بازهٔ $=\underbrace{\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۲-۰}{۲}=۱$ (۰/۲۵)

ب آهنگ لحظه‌ای $=\underbrace{f'(x)=۲x-۱}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{۲x-۱>۱}_{(۰/۲۵)}=x>۱$ (۰/۲۵)

۱۳. طول مینیمم نسبی $=۲$ (۰/۲۵) طول ماکزیمم نسبی $=۳$ (۰/۲۵)

طول مینیمم مطلق $=۴$ (۰/۲۵) طول ماکزیمم مطلق $=۱$ (۰/۲۵)

۱۴.



$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\underbrace{\frac{۱}{۲}xy}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۲}x(۱۲-x^۲)=۶x-\frac{۱}{۲}x^۳$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow S'(x)=۶-\frac{۳}{۲}x^۲$ (۰/۲۵)

$۶-\frac{۳}{۲}x^۲=۰$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{x>۰} x=۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y=۱۲-۴=۸$ (۰/۲۵)

x	۰		۲		$\sqrt{۱۲}$
S'(x)		+	۰	−	
S(x)		↗	۸	↘	

(۰/۲۵)

۱۵.

$۲b=۲c \Rightarrow b=c$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲=c^۲+c^۲=۲c^۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a=\sqrt{۲}c$ (۰/۲۵)

$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{۲}c}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow e=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۰/۲۵)

۱۶.

الف $-\frac{a}{۲}=۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a=-۲$ (۰/۲۵)

ب $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۶}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r=۳$ (۰/۲۵)

۱۷.

$P=\underbrace{\overbrace{(\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱۵})}^{(۰/۲۵)}+\overbrace{(\frac{۱}{۳}\times۰)}^{(۰/۲۵)}+\overbrace{(\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۱۲})}^{(۰/۲۵)}}_{(۰/۵)}=\frac{۷}{۳۰}$ (۰/۲۵)

به روش نمودار درختی نیز نمره تعلق گیرد.